

ANNEXE

A1. L'approximation par éléments finis

Le principe de la méthode des éléments finis consiste à discrétiser le domaine d'étude en sous domaines élémentaires de dimension finie. Sur chacun de ces éléments, la fonction inconnue est approchée par un polynôme.

A1.1 La fonction d'interpolation

Le potentiel (vecteur ou scalaire) est exprimé sur chaque élément par un polynôme caractérisé par sa dimension et son ordre, il est construit de manière à être continu sur l'élément. Dans notre étude précédente en axisymétrie on va choisir des éléments triangulaires du premier ordre [27] la figure (A1.1).

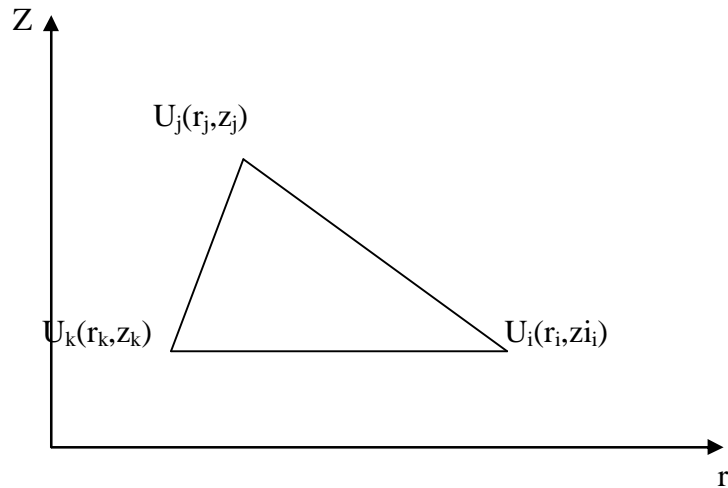


Fig.A1.1 : un élément triangulaire du premier ordre.

La fonction d'interpolation sur chaque élément sera sous la forme suivante :

$$U^e = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 z \quad (\text{A1.1})$$

Donc :

$$U_i^e(r_i, z_i) = \alpha_0 + \alpha_1 r_i + \alpha_2 z_i \quad (\text{A1.2})$$

$$U_j^e(r_j, z_j) = \alpha_0 + \alpha_1 r_j + \alpha_2 z_j \quad (\text{A1.3})$$

$$U_k^e(r_k, z_k) = \alpha_0 + \alpha_1 r_k + \alpha_2 z_k \quad (\text{A1.4})$$

Avec :

$$\alpha_0 = 1/\Delta \left[(r_j z_k - r_k z_j) U_i - (r_k z_i - r_i z_k) U_j - (r_i z_j - r_j z_i) U_k \right] \quad (A1.5)$$

$$\alpha_1 = 1/\Delta \left[(z_j - z_k) U_i - (z_k - z_i) U_j - (z_i - z_j) U_k \right] \quad (A1.6)$$

$$\alpha_2 = 1/\Delta \left[(r_k - r_j) U_i - (r_i - r_k) U_j - (r_j - r_i) U_k \right] \quad (A1.7)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{bmatrix} = (r_j - r_i)(z_k - z_j) - (r_k - r_j)(z_j - z_i) \quad (A1.8)$$

La fonction d'interpolation d'un élément en fonction du potentiel sur chaque nœud s'écrit comme suit :

$$U^e(r, z) = \sum_j^{NNE} U_j^e N_j(r, z) \quad (A1.9)$$

alors l'équation (A1.9) s'exprime par la relation suivante :

$$U^e = N_i U_i + N_j U_j + N_k U_k \quad (A1.10)$$

On déduit les fonctions de forme :

$$N^e(r, z) = \frac{1}{2\Delta} (a + br + cz) \quad (A1.11)$$

$$N_i^e(r, z) = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i r + c_i z) \quad (A1.12)$$

$$N_j^e(r, z) = \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j r + c_j z) \quad (A1.13)$$

$$N_k^e(r, z) = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k r + c_k z) \quad (A1.14)$$

Les coefficients des fonctions de forme sont définis si dessous :

$$a_i = r_j z_k - r_k z_i, \quad b_i = z_j - z_k, \quad c_i = r_k - r_j.$$

$$a_j = r_k z_i - r_i z_k, \quad b_j = z_k - z_i, \quad c_j = r_i - r_k.$$

$$a_k = r_i z_j - r_j z_i, \quad b_k = z_i - z_j, \quad c_k = r_j - r_i.$$

Avec :

i, j, k : numérotation des nœuds.

U_i^e, U_j^e, U_k^e : les valeurs nodales de U.

N_i^e, N_j^e, N_k^e : fonctions de forme.

Δ : c'est deux fois l'aire du triangle.

$(r_i, z_i), (r_j, z_j), (r_k, z_k)$: coordonnées nodales dans le repère cylindrique.

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$: coefficients.

$a_i, a_j, a_k, b_i, b_j, b_k, c_i, c_j, c_k$: coefficients.

A1.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle à l'avantage de conduire directement à la résolution d'un système d'équations algébriques. Elle est décrite en fonction du potentiel (vecteur, scalaire).

La formulation générale d'un phénomène électromagnétique (modèle statique ou dynamique) est régie par la relation suivante [27] :

$$F(U) = \iint_{\Omega} [P(\nabla U)^2 - (KU)^2 + 2gU] d\Omega \quad (A1.15)$$

dans le cas statique on a : $K=0$

avec :

P : peut être un scalaire ou un tenseur, il peut représenter une permittivité, une perméabilité ou une conductivité, il dépend du modèle à étudier.

g : la source du système qui présente la densité de courant J (en magnétodynamique et magnétostatique) comme elle peut être une charge volumique ρ (en électrostatique) ou nulle (en électrocinétique).

K : c'est un coefficient qui dépend de la conductivité et de la fréquence.

A1.3 La formulation du modèle magnétodynamique

En magnétodynamique les matériaux soumis à des champs magnétiques sont le siège de courant de Foucault. Ce dernier dépend de la fréquence des sources alternative.

L'expression de la fonctionnelle d'énergie électromagnétique sous une forme variationnelle dans un système magnétodynamique s'écrit comme suit :

$$F = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H} - \mathbf{J} \mathbf{A} \right] d\Omega \quad (\text{A1.16})$$

$$F = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 - \mathbf{J} \mathbf{A} \right] d\Omega \quad (\text{A1.17})$$

$$\ddot{\mathbf{B}} = \nabla \ddot{\mathbf{A}} = \text{rot} \ddot{\mathbf{A}} \quad (\text{A1.18})$$

En axisymétrie l'induction à la forme suivante :

$$\ddot{\mathbf{B}} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \ddot{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \ddot{\mathbf{z}} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A1.19})$$

L'étude en 2D en tenant compte uniquement du potentiel A_θ nous amène aux relations suivantes :

$$\ddot{B}_\theta^\dagger = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \ddot{\mathbf{r}} + \left(\frac{A_\theta}{r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right) \ddot{\mathbf{z}} \quad (\text{A1.20})$$

$$d\Omega = 2 \pi r dr dz \quad (\text{A1.21})$$

$$\mathbf{J}_\theta = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_F = \mathbf{J}_s + \sigma \frac{\partial A_\theta}{\partial t} \quad (\text{A1.22})$$

Selon l'hypothèse du régime sinusoïdale :

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega \quad (i^2 = -1)$$

nous aurons :

$$\mathbf{J}_\theta = \mathbf{J}_s + i\sigma\omega A_\theta \quad (\text{A1.23})$$

\vec{H} : Champ magnétique,

\vec{B} : Induction magnétique,

J_s : Densité de courant d'excitation,

J_F : Courant induit (Foucault).

En remplaçant les équations (A1.20), (A1.22), (A1.23) dans l'équation (A1.17) (avec $A_0=A$) on obtient :

$$F = \iint \left\{ \frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} \right)^2 \right] + i\sigma\omega A^2 - A J_s \right\} 2\pi r dr dz \quad (A1.24)$$

$$F = \iint r \left\{ \frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + 2A \frac{\partial A}{\partial r} + A^2 \right] + i\sigma\omega A^2 - A r J_s \right\} 2\pi dr dz \quad (A1.25)$$

La fonction d'interpolation peut s'écrire en fonction de la fonction de forme, en prenant le potentiel vecteur constant, elle comme suit :

$$A(r,z) = N^T(r,z) A = A^T N(r,z) \quad (A1.26)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial A(r,z)}{\partial z} = \frac{\partial N^T(r,z)}{\partial z} A = A^T \frac{\partial N(r,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial A(r,z)}{\partial r} = \frac{\partial N^T(r,z)}{\partial r} A = A^T \frac{\partial N(r,z)}{\partial r} \end{cases} \quad (A1.27)$$

En remplaçant l'équation (A1.27) dans l'équation (A1.25) on aura :

$$F = r \left\{ \frac{1}{2\mu} \left[A^T \frac{\partial N}{\partial z} \frac{\partial N^T}{\partial z} A + A^T \frac{\partial N}{\partial r} \frac{\partial N^T}{\partial r} A + 2A^T N \frac{\partial N^T}{\partial r} A + A^T N N^T A \right] + i\sigma\omega A^T N N^T A - N^T J_s A \right\} 2\pi r dr dz$$

(A1.28)

La fonctionnelle d'énergie s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$F = 1/2 A^T M A - F^T A \quad (A1.29)$$

Avec :

M : matrice globale.

F^T : matrice source globale.

NNe : nombre des nœuds élémentaires.

Alors d'après les équations (A1.28) et (A1.29) les matrices globales auront les formes suivantes :

$$M = \iint r \left\{ \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial z} \frac{\partial N^T}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial r} \frac{\partial N^T}{\partial r} + 2N \frac{\partial N^T}{\partial r} + NN^T \right] + i\sigma\omega NN^T \right\} 2\pi dr dz \quad (A1.30)$$

$$F = \iint 2\pi r J_s N^T dr dz \quad (A1.31)$$

Pour la résolution du système on passe par la minimisation de fonctionnelle :

$$\frac{\partial F}{\partial A_k} = 0 \quad \text{avec : } k = 1, NNe$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_k} = \sum_{i=1}^{NNe} M_{ij}^e A_j - F_i = 0 \quad (A1.32)$$

$$\Rightarrow M_{ij}^e A_j = F_i^e \quad (A1.33)$$

Avec :

M_{ij}^e : la matrice élémentaire.

F^e : la matrice source élémentaire.

La représentation des matrices sur chaque élément s'écrivent comme suit :

$$M^e = \iint r \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N^e}{\partial z} \frac{\partial N^{eT}}{\partial z} + \frac{\partial N^e}{\partial r} \frac{\partial N^{eT}}{\partial r} + 2N^e \frac{\partial N^{eT}}{\partial r} + NN^T \right] + i\sigma\omega NN^T \right\} 2\pi dr dz \quad (A1.34)$$

4)

$$F^e = \iint 2\pi r J_s N^{eT} dr dz \quad (A1.35)$$

Le calcul des matrices élémentaires au niveau de l'élément étudié auparavant est très compliqué.

Afin de simplifier ces calculs, on va présenter nos matrices sur un élément de référence qu'on va décrire ci dessous.

A1.3.1.a. L'élément de référence :

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, nous introduisons la notion d'élément de référence E_r qui est un élément de forme simple et peut être transformé en un élément réel E_e , par une transformation géométrique bien définie τ .

Par exemple dans le cas d'un élément triangulaire du premier ordre on a la figure (A1.2) :

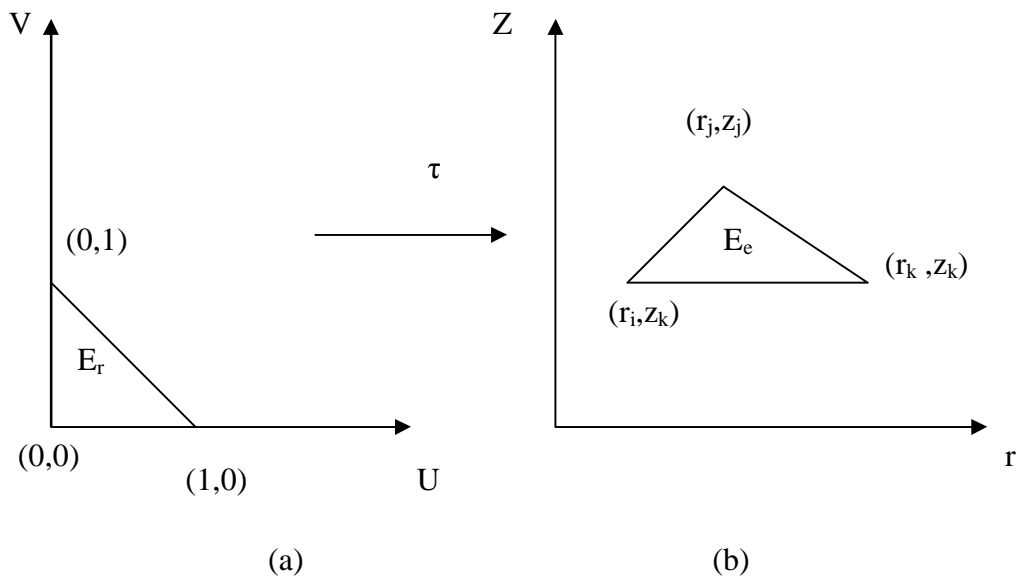


Fig.A1.2 : (a) Elément de référence, (b) Elément réel.

Les fonctions de forme associées pour chaque nœud du triangle de référence sont définies par :

$$N_i = 1 - U - V \quad (A1.36)$$

$$N_j = U \quad (A1.37)$$

$$N_k = V \quad (A1.38)$$

Avec :

$$N = \begin{pmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{pmatrix} \quad (A1.39)$$

Pour calculer les intégrales de nos formulations et leur matrices sur un élément de référence, on utilisera la transformation suivante :

$$\iint_{\Omega_e} f(r,z) dr dz = \iint_{\Omega_r} f(r(u,v), z(u,v)) \det J du dv \quad (A1.40)$$

avec :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial u} & \frac{\partial N_j}{\partial u} & \frac{\partial N_k}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} & \frac{\partial N_j}{\partial v} & \frac{\partial N_k}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i & z_i \\ r_j & z_j \\ r_k & z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_j - r_i & z_j - z_i \\ r_k - r_i & z_k - z_i \end{bmatrix} \quad (A1.41)$$

$$\Rightarrow \det J = (r_j - r_i)(z_k - z_i) - (r_k - r_i)(z_j - z_i) = \Delta \quad (A1.42)$$

J : La matrice jacobéenne.

Δ : deux fois l'air du triangle.

Alors le calcul des matrices (A1.34) et (A1.35) sur l'élément de référence est défini par les relations suivantes :

$$M^e = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} r \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N^e}{\partial z} \frac{\partial N^{eT}}{\partial z} + \frac{\partial N^e}{\partial r} \frac{\partial N^{eT}}{\partial r} + 2N^e \frac{\partial N^{eT}}{\partial r} + NN^T \right] + i2\sigma\omega NN^T \right\} 2\pi \Delta du dv \quad (A1.43)$$

$$F^{eT} = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} 2\pi r J \Delta N^{eT} du dv \quad (A1.44)$$

Selon des expériences et des recherches qui on été faites, les matrices (A1.43) et (A1.44) présentent des problèmes de singularité.

Afin de résoudre ce problème, des approximations est définie par les deux relations suivantes :

$$A' = r^{-\delta} A \quad (A1.45)$$

$$J' = r^{-\delta} J \quad (A1.46)$$

δ peut prendre des valeurs (-1, 1, 1/2) , ces trois choix sont déterminées expérimentalement. En magnétodynamique on a choisi à faire la formulation d'une seule approximation, en prenant :

$$\delta = -1 \quad \Rightarrow \quad A' = r A \text{ et } J' = r J.$$

A1.3.1.b L'approximation pour $A' = r A$ et $J' = r J$

On remplace le potentiel $A = A'/r$ et la densité du courant $J_s = J'/r$ dans l'équation (A1.25) en obtient :

$$F = \iint \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{\partial A'}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial A'}{\partial r} \right)^2 \right] + i\sigma\omega A'^2 - A' J' \right\} \pi \, dr \, dz \quad (A1.47)$$

Les matrices élémentaires sont représentées sur l'élément de référence comme suit :

$$M^e = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N^e}{\partial z} \frac{\partial N^{eT}}{\partial z} + \frac{\partial N^e}{\partial r} \frac{\partial N^{eT}}{\partial r} \right] + i2\sigma\omega N N^T \right\} 2\pi \, \Delta \, du \, dv \quad (A1.48)$$

$$F^{eT} = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} -\frac{2\pi}{r} J' \, \Delta \, N^{eT} \, du \, dv \quad (A1.49)$$

Remarque :

L'avantage de cette approximation réside dans la symétrie de ses matrices élémentaires qui occupent moins d'espace mémoire par rapport à des matrices non symétriques.